# Perché le scienze hanno bisogno della storia? Il caso della matematica

*Paolo Zellini*
Dipartimento di Matematica, Università di Roma "Tor Vergata"
zellini@mat.uniroma2.it

SISRI *Roma, 19 Maggio 2018*

# Hermann Weyl 1919: Rapporto tra passato e presente

Hermann Weyl, Spazio. Tempo. Materia, 1919:

"Le vere motivazioni originarie delle teorie sono sempre oscure, e tuttavia il matematico, quando di trova a operare con i suoi concetti lungo linee strettamente formali, dovrebbe ricordarsi di tanto in tanto che le origini delle cose giacciono in strati più profondi di quelli a cui i suoi metodi gli consentono di discendere. Al di là della conoscenza conquistata dalle singole scienze resta il compito di *capire*".

Fin dove arretrare alla ricerca delle vere motivazioni?

- Matematica babilonese, dal 1800 a.C. circa
- Matematica vedica, *Sulvasutra* dal VII Sec. a.C. circa
- Matematica egizia
- Matematica cinese, *I nove capitoli sull'arte matematica*, Dinastia Han (dal III sec. a.C. ?)
- Matematica greca

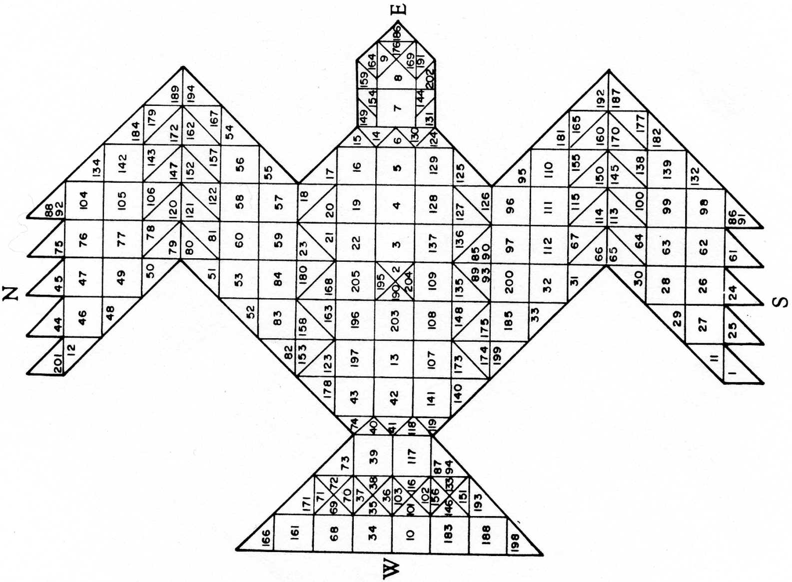
# Parole chiave

Parole chiave (Liddell, Scott, *Greek-English Lexicon*, 1996) di significato sia matematico sia filosofico:

- lógos, légein, logismós, logistiké
- schémata (forme geometriche)
- dýnamis (potenza) (Platone, Teeteto)
- análysis (Platone, Pappo III-IV sec. $\longrightarrow$ Viète, Newton, Raphson, Fourier)
- theórema, próblema (Proclo, V sec.)

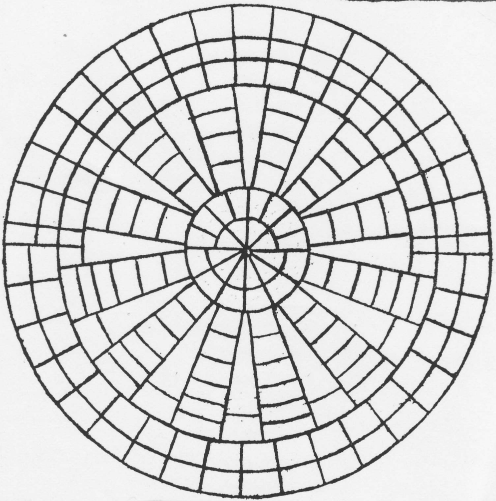
Il significato matematico aiuta a decifrare quello filosofico? E viceversa?

# *Sulvasutra* 1: 600 a.C. 300 a.C.



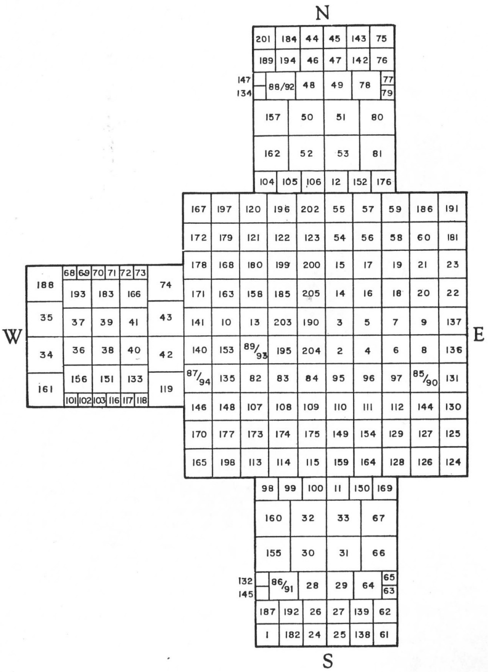
Su

Thus it has nothing to do with the second sentence, for which cp. 10.2.2.7-9, although there are many more squares. 13 The whole (fire altar) in the form of the wheel of a chariot, as a circle, shall cover ten and a half square puruṣas; (it

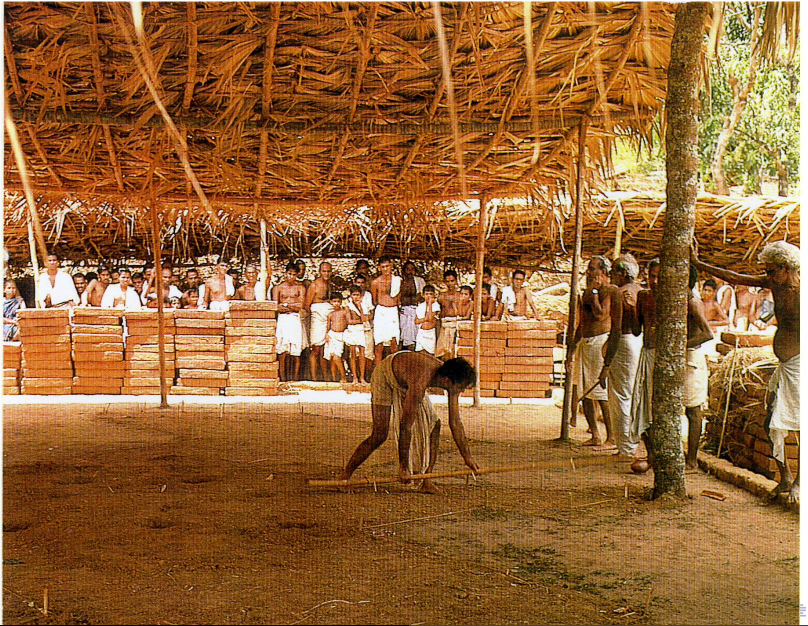


consists of) the nave, the spokes with the empty interspaces and the rim; what is left over is for the spokes. 14 The twenty-four (spokes and interspaces) have the

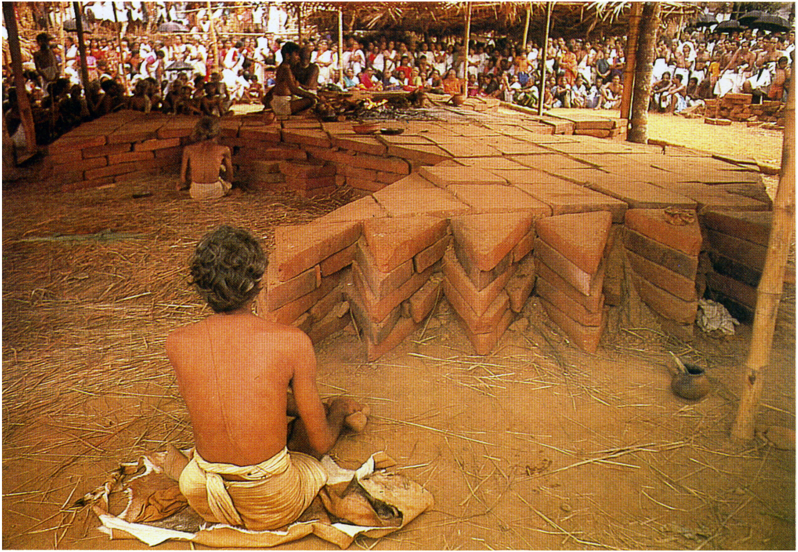
# Sulvasutra 7



# Sulvasutra 3



# *Sulvasutra* 4



# Sulvasutra 6

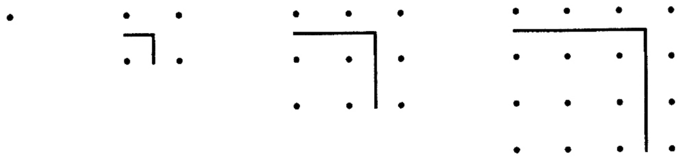
# Pitagorismo, Metamorfosi

Matematica pitagorica: figure geometriche che crescono o diminuiscono senza cambiare la loro forma. Problema della crescita. Fenomeni principali: ripetizione e autosimilarità.

Punti pitagorici $\longleftrightarrow$ mattoni negli altari vedici

$1+3=4, \quad 1+3+5=9, \quad 1+3+5+7=16 \ldots\ldots$

In generale: $1+3+5\ldots+(2n-1)=n^2$



# Pitagorici. Filolao

Platone, *Epinomide* (990 d):

La natura (phýsis) sembra come stampata nelle progressioni numeriche

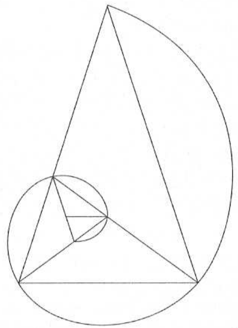
Filolao, V Secolo a.C., Diels-Kranz 44 B 11:

Il **numero**, "mettendo in armonia nell'**anima** tutte le cose con la **percezione**, le rende conoscibili e le avvicina in un reciproco accordo secondo la natura dello **gnomone**, col dar corpo e col distinguere i **rapporti** delle cose, sia nell'**infinito** che nel **finito**"

A. Boeckh, 1819: "Il conosciuto viene compreso e abbracciato dal conoscente come un quadrato è abbracciato dal suo gnomone"

Parole chiave: *numero*, *gnomone*, anima, percezione, *rapporto*, finito, infinito.

# Gnomone triangolare: Erone di Alessandria, I, II, III sec.



Sia $T$ un triangolo isoscele con due angoli di $72^o$ e uno di $36^o$ gradi. Si tracci la bisettrice da uno dei due angoli di $72^o$. Si ottengono due triangoli: uno è simile a $T$ e l'altro è lo gnomone.

Gnomon = figura che, aggiunta a una qualsiasi figura, rende l'intera figura simile a quella a cui è stata aggiunta (Erone).

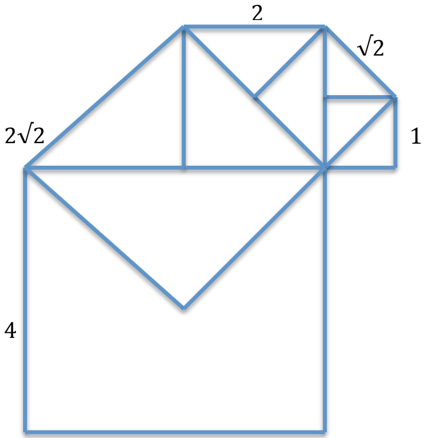
Crescita di grandezze. Origine rituale con implicazioni filosofiche

- Ingrandimento fino a cento volte degli altari vedici (di forma geometrica)
- Raddoppiamento iterativo del quadrato (Sulvasutra, Platone, *Menone*)
- Duplicazione del cubo (altare di Apollo a Delo, tomba cubica di Glauco che Minosse ordina di raddoppiare)
- Progressioni numeriche (Platone, *Epinomide*)

Congettura: Si doveva fissare un'immagine, una pausa salvifica nell'incessante metamorfosi della natura? Pitagora di Ovidio: "Tutto scorre e ogni cosa si fa immagine errabonda" (*Cuncta fluunt, omnisque vagans formatur imago* )

Platone: duplicazione del quadrato, progressione geometrica:

$$1 \quad \sqrt{2} \quad 2 \quad 2\sqrt{2} \quad 4 \quad 4\sqrt{2} \quad 8 \quad 8\sqrt{2} \quad 16 \quad \cdots\cdots$$



# Implicazioni filosofiche. Aristotele

Aristotele, *Metafisica* (983 a):

L'essenza di una cosa consiste nel fatto, per quella cosa, di continuare ad essere ciò che era

Aristotele, *Meteorologia* (379 b sgg):

Per tutto il tempo che dura un certo rapporto (lógos) la natura (phýsis) di una cosa rimane invariata

Aristotele, *Metafisica* (1014 b sgg):

Natura (phýsis) è l'elemento primo immanente da cui procede ciò che cresce

Platone, Aristotele, Nicomaco (I-II sec. d.C.), Teone di Smirne (I-II sec. d.C.), Giamblico (III-IV sec. d.C.): relazioni tra natura (phýsis), numero (arithmós) e figura geometrica (schéma)

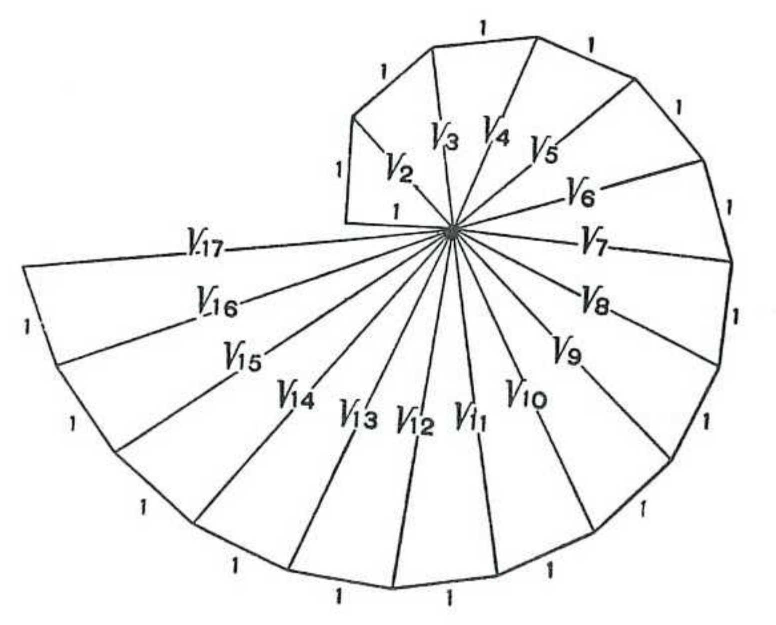
Platone, *Teeteto* (148 a-b) potenza = *dýnamis*

Teodoro faceva disegni relativi alle potenze di 3 o 5 piedi per mostrare che sono incommensurabili in lunghezza con quella di un piede, e proseguiva in questo modo scegliendo uno ad uno i valori fino ad arrivare a 17 piedi, per poi fermarsi a questo numero. Ci venne allora in mente, poiché le potenze erano infinite, di tentare di riunirle sotto un'unica nozione, che potessimo applicare a tutte le potenze.

*dýnamis* è sia la superficie, sia la linea in grado di generarla. Ad es. può denotare sia il quadrato, sia il suo lato. Di questa ambiguità si conosce un parallelo nel calcolo babilonese. Possibile confronto con la matematica vedica.

*dýnamis* di 3 o di 5 piedi = linea di lunghezza $\sqrt{3}$ o $\sqrt{5}$

# Teodoro, 465-398 a.C.



Platone, *Sofista* (247 d-e):

Dico che ciò che possiede anche una qualsiasi potenza (dýnamis), o che per natura sia predisposto a produrre un'altra cosa qualunque, o a subire anche una piccolissima azione da parte della cosa più insignificante, anche se soltanto per una volta, tutto ciò realmente è. Infatti, propongo una definizione: gli enti non sono altro che potenza (dýnamis).

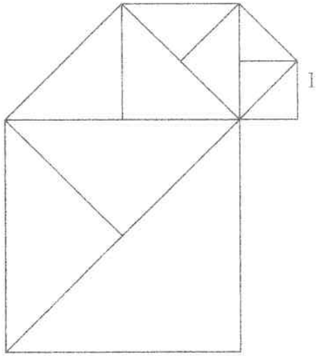
Aristotele: la potenza non si risolve in atto se non per qualcosa che già esiste in atto

Tommaso d'Aquino: *Oportet enim ante id quod est in potentia, esse aliquid actu, cum ens in potentia non reducator in actum, nisi per aliquod ens in actu*

# Crescita delle grandezze 3

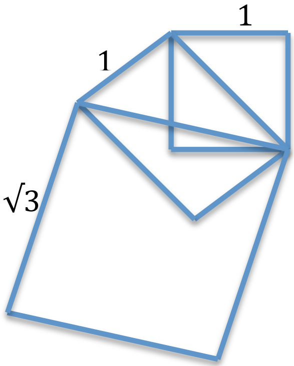
Raddoppiamento iterativo del quadrato (*Sulvasutra*, Platone, *Menone* , *Epinomide* , *Politico*, 266 b)

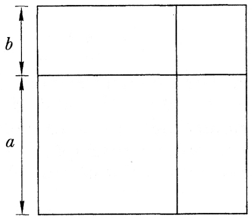
*dvikarani* = Diagonale del quadrato che produce il doppio quando su di essa si costruisce un altro quadrato



Triplicazione iterativa del quadrato (*Sulvasutra*, Platone)

*trikarani* = Diagonale del quadrato che produce il triplo quando su di essa si costruisce un rettangolo e un altro quadrato






- Algoritmo: $b = h$ calcolo di $\sqrt{2}$: $x^2 - 2 = 0$ $x \longrightarrow a + h$
  $a = 1^a$ approssimazione di $\sqrt{2}$. Per esempio: $a = 1$
  $(a+h)^2 = a^2 + 2ah + h^2 = 2 \Longrightarrow h \approx -\dfrac{a^2-2}{2a}$
  Nuova (migliore) approssimazione: $a' = a - \dfrac{a^2-2}{2a} = 3/2$

Babilonesi (1800 - 1600 a.C.). Matematica vedica. Teone di Alessandria (IV Sec.). Cina: *Nove capitoli sull'arte matematica*. Matematica araba. Sec. XVI-XVII: Viète, Newton.

# Equazione e algoritmo di Newton

Equazione storica di Newton:

$$f(x) := y^3 - 2y - 5 = 0, \qquad y = 2 = \text{prima congettura}$$

$$y \to 2 + h$$

$$g(h) := h^3 + 6h^2 + 10h - 1 = 0$$

$$10h - 1 \approx 0 \Rightarrow h \approx 0.1$$

Raphson (1690), Wallis (1693), Fourier (1818)
Metodo di Newton $\to$ algoritmo iterativo per l'equazione $f(x) = 0$:

$$x_{i+1} = x_i - f(x_i)/f'(x_i), \qquad x_0 \text{ prefissato}$$

1. Continuo e discreto
2. Linearizzazione
3. Riduzione progressiva di un residuo
4. Il reciproco di $f(x_i)/f'(x_i)$ serve per un' analisi dell'errore

# Incremento gnomonico

Incremento gnomonico: $a' = a - \dfrac{a^2 - 2}{2a}$

$\Rightarrow$ Serie di Taylor. Algoritmi derivati da costruzioni geometriche:

- Calcolo di $\sqrt{n}$: $x_{i+1} = x_i - (x_i^2 - n)/2x_i$ Newton-Raphson
- Equazione $f(x) = 0$: $x_{i+1} = x_i - f(x_i)/f'(x_i)$ Fourier
- Sistemi di equazioni $F(\mathbf{x}) = 0$: $\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i - J(\mathbf{x}_i)^{-1} F(\mathbf{x}_i)$
- Minimo di $f(\mathbf{x})$: $\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i - H(\mathbf{x}_i)^{-1} \bigtriangledown (f(\mathbf{x}_i))$

$J$ = Matrice Jacobiana $H$ = Hessiano $i = 0, 1, 2, \ldots$
$\bigtriangledown(f(\mathbf{x}_i))$ = gradiente di $f$

# algoritmo: definizione informale

Markov, *Theory of algorithms*, 1954

un algoritmo è un processo che soddisfa i seguenti requisiti:

- precisione prescrittiva, che non lasci spazio all'arbitrio, ovvero un carattere di definitezza
- possibilità di iniziare il processo da un insieme di dati iniziali, variabili entro certi limiti generalità
- il processo deve essere orientato a ottenere un risultato, calcolabile in base ai dati iniziali: deve essere cioè conclusivo o effettivo.

Esempi: algoritmo euclideo, algoritmo di Newton, numeri laterali e diagonali

# Goldstine, von Neumann

H. H. Goldstine, John von Neumann, 1946:

“Our problems are usually given as continuous-variable analytical problems, frequently wholly or partly of an implicit character. For the purposes of digital computing they have to be replaced, or rather approximated, by purely *arithmetical*,*'finitistic'*, explicit (usually *step-by-step* or *iterative*) procedures”.

Analisi $\longrightarrow$ Procedure aritmetiche

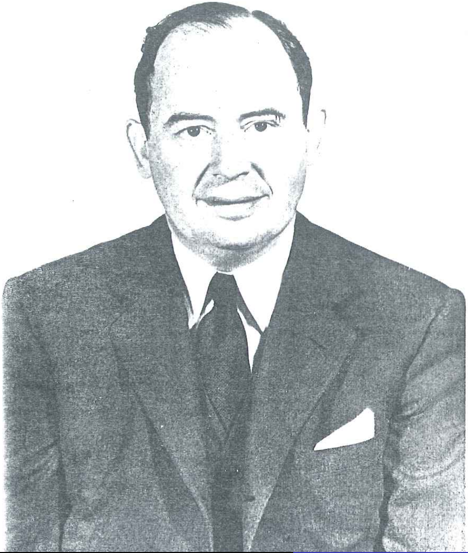
Aritmetizzazione dell'Analisi

Ricondurre l'infinito matematico a procedimenti finiti di tipo algoritmico (Hilbert)

# principali applicazioni

1. Euclide, *Elementi*, II, X.
2. Terne pitagoriche, note anche nella matematica vedica.
3. Matematica araba. Regula falsi.
4. Tartaglia, Cardano, Bombelli (XVI Secolo). Equazioni algebriche di terzo grado. Numeri complessi.
5. Equazioni algebriche di grado arbitrario: Viète, Newton, Raphson, Fourier. Metodo di Newton.
6. Sistemi di equazioni non lineari
7. Ottimizzazione numerica. Minimizzazione di funzioni
8. processi di apprendimento su reti neurali (Deep learning)
9. Calcolo matriciale.
10. Analisi dell'errore di calcolo

# John von Neumann



# Brouwer, invarianza, infinito

Luitzen E.J. Brouwer (1907): "La matematica si crea per via di una libera azione indipendente dall'esperienza: essa si sviluppa da una singola fondamentale intuizione a priori, che potremmo chiamare *invarianza nel cambiamento*, come pure *unità nel molteplice*"

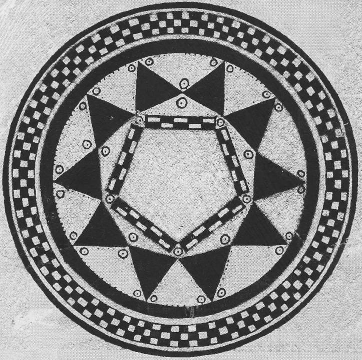


*Fig. 69* Painted Plate; Brak, Halaf Period

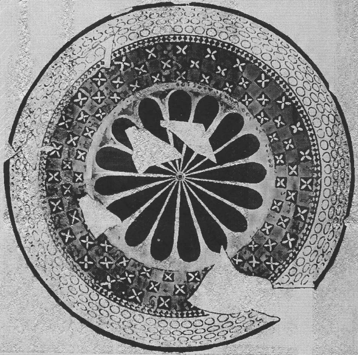
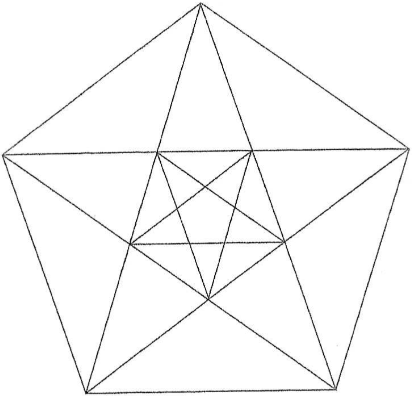


*Fig. 70* Polychrome Plate; Arpachiyah, Halaf Period

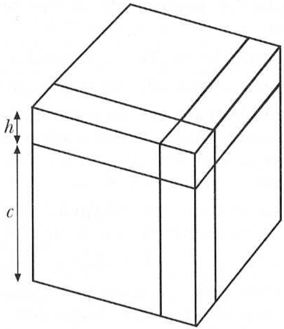
# Figure autosimilari: pentagono regolare

Pentagono regolare: esiste un divisore comune tra diagonale $d$ e lato $s$? Algoritmo euclideo

$d/s = \Phi := (1+\sqrt{5})/2$ (numero aureo)



# gnomone cubico




Gnomone cubico: $(c+h)^3 = c^3 + 3c^2h + 3ch^2 + h^3$

- Radici cubiche. Equazioni di terzo grado. Numeri complessi
- Equazioni generali
- Sistemi di equazioni
- Massimi e minimi

# Bordering technique 1

Matrici di Toeplitz. Applicazioni alla risoluzione numerica di equazioni integrali (Fredholm), alla predizione e filtraggio di segnali (Wiener, Levinson):

$$T = \begin{bmatrix} z_0 & z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ z_1 & z_0 & z_1 & z_2 & z_3 \\ z_2 & z_1 & z_0 & z_1 & z_2 \\ z_3 & z_2 & z_1 & z_0 & z_1 \\ z_4 & z_3 & z_2 & z_1 & z_0 \end{bmatrix}$$

Forma (*pattern*) della matrice conforme all'immagine dello gnomone quadrato. Fatto ovvio: ogni elemento di $T$ si ottiene dalla prima riga. Fatto meno ovvio: ogni elemento della matrice inversa $T^{-1}$ si ottiene dalla sua prima riga.

$$A = A_n = \begin{bmatrix} A_{n-1} & \mathbf{u} \\ \mathbf{v}^T & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & a & a & a & a \\ a & a & a & a & a \\ a & a & a & a & a \\ a & a & a & a & a \\ a & a & a & a & b \end{bmatrix}$$

- Ragionamento per induzione
- Ricorsione
- Iterazione
- Applicazioni: decomposizione $A = LU$, costruzione di $A^{-1}$

$$A_n^{-1} = \begin{bmatrix} A_{n-1}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix} + c \cdot \begin{bmatrix} A_{n-1}^{-1}\mathbf{u} \\ -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}^T A_{n-1}^{-1} & -1 \end{bmatrix}$$

$$c = \text{costante} = (b - \mathbf{v}^T A_{n-1}^{-1}\mathbf{u})^{-1}, \quad A_1 = [a], \quad A_1^{-1} = [1/a]$$