CENTRO DI DOCUMENTAZIONE INTERDISCIPLINARE
DI SCIENZA E FEDE

DISF WORKING GROUP

SEMINARIO PERMANENTE

III CICLO

I anno: La razionalità scientifica e la ricerca dei fondamenti

A. Strumia
La percezione dei fondamenti nel pensiero logico e matematico

Documento 10/2011

Traccia schematica ad uso dei partecipanti al seminario
(è vietata la riproduzione senza il permesso dell'autore)

La percezione dei fondamenti nel pensiero logico e matematico

Seminario del 5 febbraio 2011

Alberto Strumia

Ipotesi e Verità nella matematica

Sono rimasto molto colpito, nel trovare in un volume dell'*Opera omnia* di Kurt Gödel (1906-1978), uno dei più grandi se non il più rilevante tra i logici matematici del XX secolo, un suo intervento in cui egli ha affermato la necessità inevitabile di una "fondazione non convenizionalistica" della matematica. Parlando all'*American Mathematical Society,* in una conferenza del 1951 così si esprimeva:

> «L'indagine sui fondamenti della matematica negli ultimi decenni ha fornito alcuni risultati che sono a mio giudizio interessanti non solo di per sé, ma anche in considerazione delle conseguenze che hanno sui tradizionali problemi filosofici che concernono la natura della matematica. […]
>
> Nella sua forma più semplice incontriamo questo fatto quando si applica il metodo assiomatico non a sistemi ipotetico-deduttivi come la geometria (dove i matematici possono affermare soltanto la verità condizionale dei teoremi), ma alla matematica in senso stretto [*mathematics proper*], cioè a quel nucleo di proposizioni matematiche che sono valide in senso assoluto, senza alcuna ipotesi ulteriore. Proposizioni cosiffatte devono esistere, perché altrimenti non esisterebbero neppure i teoremi ipotetici». […]
>
> Naturalmente il compito di assiomatizzare la matematica in senso stretto differisce dalla concezione ordinaria della assiomatica in quanto gli assiomi non sono arbitrari, ma devono essere proposizioni matematiche corrette, nonché evidenti senza dimostrazione. Non c'è via di fuga dall'obbligo di assumere certi assiomi o certe regole di inferenza come evidenti senza dimostrazione»[1].

Da un personaggio che ha dimostrato l'incompletezza e l'impossibilità di dedurre la coerenza di un sistema assiomatico sufficientemente strutturato (come i *Principia Mathematica* di Russell e Whitehead[2]) – cosa che secondo i più ha ridotto anche la matematica e con essa tutta la scienza a pura arbitrarietà – non ci si sarebbe aspettata una simile dichiarazione di fiducia nella possibilità di fondare un sapere oggettivo, che va al di là di quel "relativismo" che, dopo poco più di mezzo secolo, oggi domina la cultura e la mentalità di quasi tutti. Eppure per lui la logica dice che in questa impresa fondazionale consiste la vera intrapresa e il vero senso della matematica.

Evidenti, nel senso di irrinunciabili

Una precisazione va fatta, in merito alla parola «evidenti», che come "moderni" siamo abituati a rifiutare in quanto, legata a quel "realismo ingenuo" che la filosofia ha superato da secoli. Ma qui "evidenti" non va inteso, ovviamente, come espressione di ingenuità filosofica, ma nel senso rigorosamente razionale di "logicamente irrinunciabili". Un po' come quelli che

---

[1] Kurt Gödel, "Alcuni teoremi basilari sui fondamenti della matematica e loro implicazioni filosofiche" (1951), in K. Gödel, *Opere,* vol. 3, Bollati Boringhieri, Torino 2006, pp. 268-286.

[2] A.N. Whitehead, B. Russell, *Principia Mathematica,* Cambridge University Press, Cambridge (UK) 1997, 3 volls.

la logica antica che risale ad Aristotele (384-322 a.C.) e ai relativi *Commenti* di Tommaso d'Aquino (1225ca-1274)[3], chiamava i "principi primi": proposizioni che vengono affermate nel momento stesso in cui si cerca di negarle. Per cui negarle conduce a contraddizione.

> «La stessa filosofia prima non li dimostra direttamente in quanto sono indimostrabili. […]
>
> Anche se non si possono dimostrare direttamente, tuttavia il filosofo primo offre una sorta di dimostrazione nel senso che, per poterli contraddire, coloro che li vogliono rifiutare, devono ammetterne la validità, pur non accettandoli per evidenza»[4].

E insieme alle "proposizioni" o "enunciati" primi ci sono anche delle "nozioni prime" (tra quelle che noi oggi chiamiamo "concetti primitivi" di una teoria) che non possono essere scelte convenzionalmente, essendo irrinunciabili per il pensare in quanto tale. Dice a questo proposito ancora Tommaso:

> «Ogni scienza affronta il problema dei principi comuni delle cose; ed è necessario che lo faccia, perché la verità dei principi comuni emerge con chiarezza dalla conoscenza dei termini comuni, come ente e non ente, tutto e parti, ecc.»[5].

A partire da George Cantor (1845-1918) la matematica parlerà di "insiemi" e di "classi", di "parti" (esterne, interne a un insieme con la topologia) come nozioni primitive necessarie ad elaborare la teoria matematica[6].

Oltre il relativismo

Queste frasi entrano in certo modo in risonanza con le parole di colui che oggi è Papa Benedetto XVI, pronunciate già negli anni in cui era cardinale e che hanno uno sviluppo continuo e progressivo nel suo attuale Magistero pontificio.

> «Questo relativismo, che oggi, quale sentimento base della persona "illuminata", si spinge ampiamente fin dentro la teologia, è il problema più grande della nostra epoca»[7].

Occorre, dunque, mettere a punto una razionalità capace di elaborare una "teoria dei fondamenti" e una "teoria della conoscenza" che dia spessore alla verità oggettiva, interrogandosi sul

> «se e come la verità possa tornare ad essere "scientifica"»[8].

Percorso della matematica

Vale la pena almeno accennare a come internamente al percorso storico e logico della matematica stessa sia venuta maturando questa esigenza di ricerca di un suo fondamento oggettivo universale, motivato da una irrinunciabilità logica. Una questione che, a questo

---

[3] Tute le opere di Tommaso d'Aquino sono disponibili anche in rete, in lingua originale, all'indirizzo www.corpusthomisticum.org/iopera.html.

[4] Tommaso d'Aquino, *Commento ai Secondi analitici di Aristotele,* Libro I, lettura 20, n. 5 (traduzione mia).

[5] *Ibidem.*

[6] Una breve introduzione all'opera di Cantor si può trovare in G. Cantor, (G. Rigamonti curatore), *La formazione della teoria degli insiemi,* Sansoni, Firenze 1992.

[7] J. Ratzinger, *Fede, Verità, Tolleranza,* Cantagalli, Siena 2005, p. 75.

[8] *Ivi,* p. 201.

punto, non riguarda soltanto la "matematica" accademica, ma avendo a che fare con la "logica", finisce per coinvolgere la "razionalità" come tale, e quindi la stessa possibilità della "scienza", della "filosofia", e della "teologia" come scienze (e non come semplici "narrazioni"). In ultima istanza la "conoscenza" e la "cultura" come tali, la mentalità che ci guida nella vita quotidiana, i fondamenti del diritto e della legislazione, le nostre scelte etiche, la "vivibilità" della società e la politica.

Si tratta di un duplice percorso compiuto dalla matematica nell'arco di circa venticinque secoli:

– da un lato, sul piano del "metodo", abbiamo un primo percorso che va dall'"esperienza" del mondo "reale" al mondo "mentale", ad una "logica" espressa con un formalismo totalmente distaccato dalla realtà;

– dall'altro, dal punto di vista del "linguaggio" abbiamo uno staccarsi da ogni "equivocità" e "analogia", proprie del linguaggio comune, per tendere alla più totale "univocità" del linguaggio simbolico formalizzato.

Il dato inaspettato consiste nel dover rilevare – cosa accaduta principalmente a partire dalla teoria degli insiemi di Cantor e dai teoremi di Gödel[9] – che ad un certo punto questo percorso necessita di invertire la rotta, rivolgendosi nuovamente all'esperienza e riscoprendo l'analogia, come condizione "irrinunciabile" per uscire da paradossi e contraddizioni.

Viaggio di andata: dal mondo dell'esperienza al mondo mentale e dall'analogia all'univocità

Sommariamente possiamo dire che la matematica

– nasce dalle esperienze, in certo modo elementari, del contare (che ha condotto all'aritmetica con i suoi sviluppi) e del misurare (con la geometria, a partire dalla misura dei terreni come suggerisce l'etimologia della parola stessa);

– si distacca progressivamente dall'esperienza del mondo fisico reale spostandosi sempre più sul piano della logica, nel mondo mentale, coinvolgendo via via anche la creatività di quanti l'hanno elaborata.

In una prima fase vediamo personaggi come Archimede (III sec. a.C.) che scrive:

> «Spesso io scopersi con l'aiuto della meccanica proposizioni che ho poi dimostrato col mezzo della geometria, perché il metodo in questione non costituisce una vera dimostrazione. Giacché riesce più facile, dopo che con tale metodo si sia acquistata una cognizione all'ingrosso delle questioni, immaginarne poi la dimostrazione, che se si cercasse questa senza alcuna nozione preliminare»[10].

Con Euclide (III sec. a.C.)[11] viene messo a punto sistematicamente questo passaggio dall'empiria al metodo logico-dimostrativo.

---

[9] Oltre al famoso articolo originale di K. Gödel, "Proposizioni formalmente indecidibili dei *Principia Mathematica* e sistemi affini I", in Gödel, *Opere,* vol. 1, pp. 113-138, vale la pena segnalare la classica esposizione di E. Nagel, J.R. Newman, *La prova di Gödel,* Bollati Boringhieri, Torino 1982. Per un approccio maggiormente didattico e introduttivo, segnalo anche la mia introduzione alla stessa prova, in A. Strumia, *Le scienze e la pienezza della razionalità,* Cantagalli, Siena 2003, pp. 141-144.

[10] G. Loria, *Le scienze dell' antica Grecia,* Milano, 1914, citazione tratta da *Storia della scienza dalle origini a giorni nostri,* a cura di M. Daumas, Laterza, Bari 1969, vol. I, p. 216.

[11] La raccolte delle opere di Euclide si trova in Euclide (Acerbi Fabio curatore), *Tutte le opere. Testo greco a fronte,* Bompiani, Milano 2007.

Il distacco della matematica (in particolare della geometria) dall'esperienza sarà completo con la nascita delle "geometrie non euclidee"[12], la cui ammissibilità logica aprirà la strada verso il "convenzionalismo" nella scelta degli assiomi e verso il "logicismo" dell'intero impianto della matematica. Agli assiomi e quindi all'intero sistema assiomatico non si richiede di essere "veri", di fornire una teoria rispondente alla realtà "fisica", ma semplicemente di essere non contraddittori, cioè "coerenti".

Tutto prosegue senza seri problemi in questo progressivo viaggio di andata dal mondo reale a quello mentale, dall'esperienza alla logica, fino a quando non si giunge alla teoria degli insiemi di Cantor e all'ambizioso quanto conseguente "programma" di Hilbert (1862-1943) di dimostrare la "completezza" e la "coerenza dell'intero sistema assiomatico che regge la matematica. Dove:

– "completezza" significa che ogni enunciato che può essere formulato, rispettando le regole, con il linguaggio simbolico del sistema assiomatico deve poter essere dimostrato (cioè dedotto dagli assiomi), oppure deve essere dimostrato il suo contraddittorio. In un sistema completo non ci sono enunciati "indecidibili";

– "coerenza" significa che si può dimostrare che il sistema assiomatico è privo di contraddizioni rispetto agli assiomi.

Paradossi e indecidibilità: Cantor, Russell e Gödel

Con la teoria degli insiemi si incominciano a scoprire, un po' alla volta, una serie di paradossi logici e semantici[13] che sembrano minare seriamente questa, per altro affascinante, idea di ampliare l'oggetto della matematica dal solo campo dei numeri e del calcolo simbolico (aritmetica e algebra), delle relazioni (teoria delle funzioni e analisi matematica, geometria analitica), al più vasto mondo delle collezioni di oggetti di qualsiasi natura (insiemi e classi) mettendo a punto una sorta di "ontologia" simbolica per queste entità.

Tanto per citare almeno due esempi, tra i più noti, ci si accorge che certe collezioni come

– quella degli insiemi che non possono appartenere a se stessi (classe di Russell) e

– quella a cui appartengono tutti gli insiemi (classe universale)

se trattate a loro volta come degli insiemi, sono paradossali e portano a delle contraddizioni.

Con i teoremi di Gödel, di incompletezza e sulla indecidibilità delle coerenza viene dimostrata l'esistenza di proposizioni formalmente "indecidibili" all'interno di un sistema assiomatico sufficientemente complesso come quello dei *Principia Mathetatica* di Russell e Whitehead. Un risultato che sarà esteso successivamente a tutti linguaggi in cui si possano formulare enunciati autoreferenziali e che sembra comportare un inevitabile "regresso all'infinito": se SA_1 è un sistema assiomatico in cui p è una proposizione indecidibile, possiamo ampliarlo in un nuovo sistema assiomatico SA_2 che ad SA_1 aggiunge p come nuovo assioma, rendendola così decidibile. Ma per il teorema di incompletezza di Gödel SA_2 conterrà, a sua volta almeno una proposizione indecidibile q, e così via all'infinito.

---

[12] Molto bella e dettagliato è il classico studio di R. Bonola, *La geometria non euclidea,* Zanichelli, Bologna 1906, ristampa anastatica 1975, oltre naturalmente all'originale opera di N. Lobacevskij, *Nuovi principi della geometria. Con una teoria completa delle parallele,* Bollati Boringhieri, Torino 1994.

[13] Un'esposizione sintetica ma rigorosa di questi paradossi logici e semantici si trova in E. Mendelson, *Introduzione alla logica matematica,* Bollati Boringhieri, Torino 1972.

Si tratta di due risultati, quello della paradossalità di certi insiemi e quello dell'indecidibilità di certi enunciati, che sono collegati in certo modo tra loro, in quanto gli insiemi paradossali si possono definire mediante degli enunciati autoreferenziali, grazie all'"assioma del rimpiazzamento".

Viaggio di ritorno dal mondo mentale al mondo dell'esperienza
dall'univocità all'analogia

Nascono a questo punto due domande:

– *Domanda* 1: se $\mathcal{R}$ e $\mathcal{U}$ non sono insiemi, non esistono o sono qualcos'altro?

– *Domanda* 2: se un sistema assiomatico SA è indecidibile è inevitabile il ricorso all'infinto (che comporta un sostanziale relativismo) o esiste un "primo" che è qualcos'altro?

Da che cosa dipende l'insorgere di questi paradossi e dell'indecidibilità? È possibile superarli e come?

La risposta alla prima domanda è che i paradossi sono dovuti all'"univocità" della nozione di insieme e, se ci si vuole spingere ancora più in là, dall'univocità della nozione di sistema assiomatico. Bisogna dunque rinunciare alla nozione di classe universale e a qualche forma di decidibilità di nozioni che in realtà sappiamo essere vere?

I matematici avevano due possibilità: la prima era quella di rinunciare alla nozione di classe universale, nozione che pur era comoda e utile nell'ambito della teoria; la seconda era quella di porre la domanda in un modo più adeguato, che aprisse la strada alla risposta corretta. Riformuliamo, dunque le due domande nel modo seguente:

– *Domanda* 1: $\mathcal{R}$ e $\mathcal{U}$ non sono insiemi, o sono insiemi "in un altro modo"?

– *Domanda* 2: se SA è indecidibile è inevitabile il ricorso all'infinto (relativismo) o esiste un "primo" che è SA in un altro modo?

A questo punto le risposte a cui Russell e Gödel poterono giungere, almeno per quanto riguarda la prima domanda, è stata:

– lo sono "in un altro modo": Russell ci arrivò con la sua "teoria dei tipi" e Gödel, in una maniera ancora più semplice ed elegante, la distinzione tra "classi proprie" e "classi improprie". Senza esserne consapevoli avevano riscoperto nel contesto della moderna teoria assiomatica una forma di quella che per Aristotele e Tommaso era l'"analogia dell'ente" (*analogia entis*).

Alla risposta alla seconda domanda sulla questione della decidibilità sembra che i matematici stiano arrivando in tempi ancora più vicini a noi:

– esiste ed è SA in un altro modo: quello della realtà extramentale alla quale si attinge decidendo mediante l'"esperienza".

Alcuni tra loro, infatti hanno notato come:

> «I paradossi dell'autoriferimento sono noti da millenni. I teoremi di Gödel ci costringono a vederne il loro lato positivo, mostrandoci che la contraddizione nasce solo se ci si appiattisce ad un unico [univocità] livello di astrazione»[14]

[14] G. Sambin, "Incompletezza costruttiva", in G. Lolli, U. Pagallo (curatori), La complessità di Gödel, Giappichielli Editore, Torino 2008, p. 125-142.

> «A mio giudizio [...] i moderni risultati sull'incompletezza [...] spingono nella direzione di una prospettiva "quasi empirica" della matematica»[15].

Due modi di attuarsi delle classi: verso l'analogia

Per quanto riguarda la risoluzione dei paradossi nell'ambito della teoria degli insiemi mi limito ad accennare alla soluzione proposta da Gödel[16], che è la più semplice, distinguendo due "modi" in cui una classe, cioè una collezione di oggetti qualunque, può realizzarsi. Si noti bene come, per superare i paradossi:

– occorrano due definizioni diverse per distinguere i "modi di esistere" di una classe (non univocità della nozione di classe)

– modi che però non sono disparati (equivocità), ma hanno in comune (analogia) il fatto di essere entrambi collezioni di oggetti, ricorrendo nelle loro definizioni la stessa relazione di appartenenza (∈).

Def. 1 - Ogni classe che appartiene ad una classe è una "classe impropria" (o "insieme")

$$X \in Y = \mathrm{Ins}(X).$$

— *Def.* 2 - Ogni classe che NON appartiene a una classe è una "classe propria":

$$\mathrm{Clp}(X) \Leftrightarrow \neg\, \mathrm{Ins}(X), \qquad\qquad X \notin Y.$$

Ne viene di conseguenza che $\mathcal{R}$ e $\mathcal{U}$ sono classi proprie: non possono appartenere a un'altra classe né a se stesse. Così si rimuovono i paradossi e le contraddizioni.

Joseph Bochenski (1902-1995), logico e storico della logica del XX secolo, ha notato come l'impossibilità, rilevata da Aristotele, di parlare dell'ente come un "genere" [insieme] universale univocamente definito, senza incorrere in una contraddizione, si ricolleghi proprio a quello che noi oggi conosciamo come

> «problema della classe universale. Egli [Aristotele] lo risolse con una brillante intuizione, sebbene, come ora sappiamo con l'aiuto di una dimostrazione imperfetta. Il passo relativo si trova nel terzo libro della Metafisica:
> "Non è possibile che l'essere o l'unità siano un singolo genere di oggetti" (B3, 998b 22-27)»[17]

Tommaso d'Aquino, commentando Aristotele, rilevava che gli antichi filosofi

> «cadevano in errore, perché utilizzavano la nozione di ente come se corrispondesse ad una unica definizione e ad una sola natura, come fosse la natura di un unico genere; ma questo è impossibile. Infatti ente non è un genere, ma si dice di realtà diverse secondo accezioni diversificate»[18]

---

[15] G.J. Chatin, "L'incompletezza è un problema serio?", in Lolli/Pagallo, p. 68

[16] Si veda il suo articolo "La coerenza dell'assioma della scelta e dell'ipotesi generalizzata del continuo con gli assiomi della teoria degli insiemi", in Gödel, *Opere,* vol. 2, pp. 36-106.

[17] J.M. Bochenski, *La logica formale,* Einaudi, Milano 1972, vol. I, p. 77

[18] *Commento alla Metafisica di Aristotele,* Libro I, lettura. ix, n. 6

E ancora spiegava che Aristotele

> «dimostra, nel III libro della Metafisica, che ente non può essere il genere di qualcosa, perché ogni genere comporta delle differenze che sono al di fuori dell'essenza [definizione] del genere stesso; mentre non si dà nessuna differenza al di fuori dell'ente, perché il non ente non può costituire una differenza [in quanto non esiste]»[19]

Con il senno di poi, si può dire che l'analogia dell'ente è stata intravista:

– da Gödel quando ha scoperto la necessità di distinguere tra classi "proprie" e "improprie", e

– da Russell con la teoria dei "tipi",

grazie al fatto che le "classi" e gli "insiemi" sono un "caso particolare di ente", che si presenta come una collezione di oggetti.

Ma questo loro carattere di enti particolari è sufficiente a far emergere la diversificazione dei loro "modi di essere" (definiti), per evitare contraddizioni.

Collocandoci in un piano più squisitamente metafisico sappiamo che l'analogia consente di distinguere modi di esistenza diversificati dell'ente tra i quali:

– quello che chiamiamo ente "reale" che è nel mondo esterno a noi e l'ente "intenzionale" che risiede nella nostra mente e nella nostra logica;

– quello che chiamiamo "soggetto" (sostanza, o ente per se stesso) e quello che chiamiamo "proprietà" (accidente o ente di un altro ente).

> «Sorge la domanda sul perché l'analogia [che è di origine greca e medievale] sia penetrata nel terreno della logica formale [che è moderna]. La risposta sembra [consistere nel fatto che ...] la logica formale recente non è altro che una parte dell'ontologia classica»[20].

Ai nostri giorni viene così ad aprirsi la strada in vista del passaggio da una "teoria degli insiemi" a una più generale "teoria degli enti": si tratta di una teoria dei fondamenti logici e ontologici delle scienze, talvolta chiamata "ontologia formale"[21].

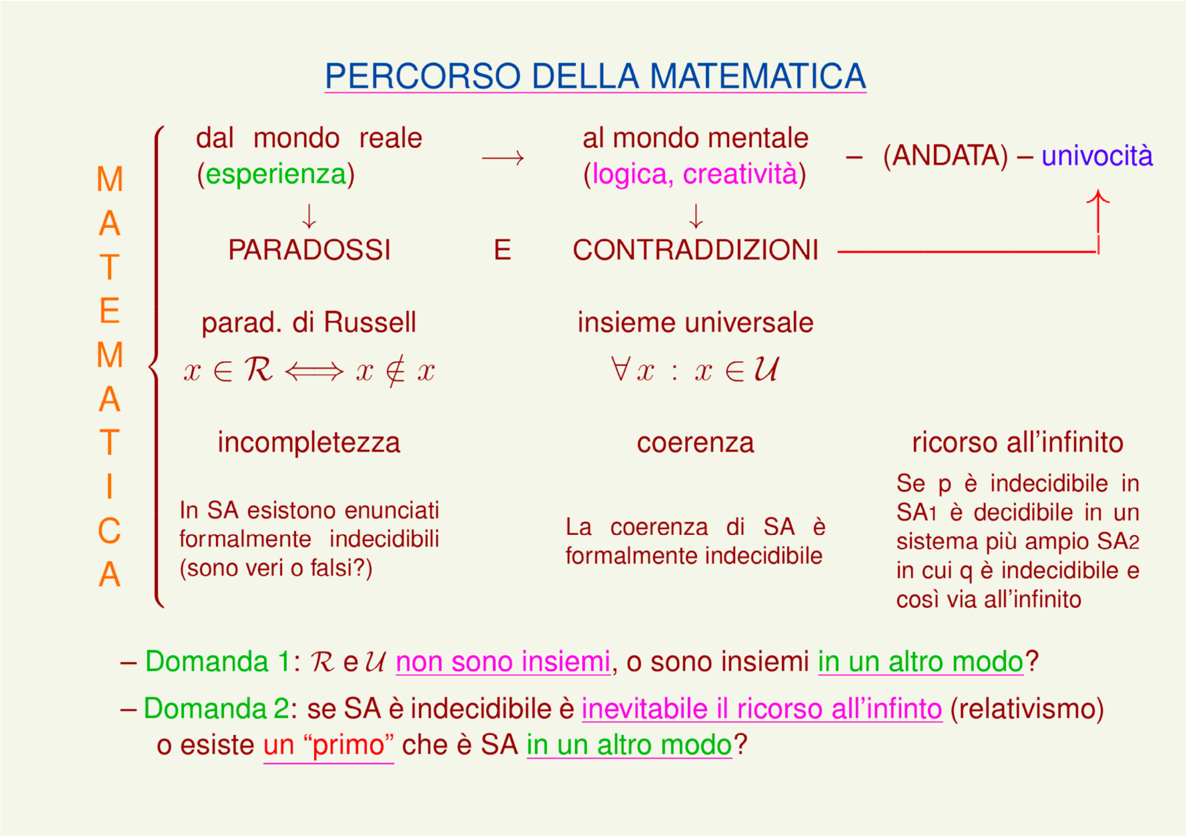
Mi sembra possa essere di qualche utilità, concludendo, riassumere visivamente con uno schema grafico i passaggi logici essenziali del percorso della matematica, attraverso lo schema riportato nella figura.

---

[19] *Somma TheoIogica,* parte I, questione 3, artciolo 5.

[20] J. Bochenski, "Sulla analogia", in G. Basti, C.A. Testi (curatori), *Analogia e autoreferenza,* Marietti *1820,* Genova-Milano 2004, p. 158.

[21] Mi sono avventurato anch'io in un tentativo in questa direzione cercando di mettere a confronto, a partire da queste cosiderazioni, la formulazione di Gödel dell'assiomatica della teoria degli insiemi, con alcuni aspetti della logica e metafisica aristotelico-tomista. Quello che ne è venuto fuori è raccolto nel mio *Il problema dei fondamenti. Un'avventurosa navigazione dagli insiemi agli enti passando per Gödel e Tommaso d'Aquino,* Cantagalli, Siena 2009.



A conclusione di questo tracciato vorrei evidenziare come quanto abbiamo detto, richiami alla mente la sfida che fu lanciata già da Giovanni Paolo II alla fine degli anni del secondo millennio:

> «Una grande sfida che ci aspetta al termine di questo millennio è quella di saper compiere il passaggio, tanto necessario quanto urgente, dal fenomeno al fondamento» [22].

C'è da augurarsi che ci sia che fa proprie queste parole anche tra i logici, i matematici e gli scienziati dei nostri giorni.

[22] Lettera enciclica *Fides et ratio,* n. 83.